Álgebra I (MA – 2221)
Guía de Ejercicios Nº 1

1.- Determine por extensión los siguientes conjuntos:
(a) $A = \{x \in \mathbb{Z}: x = 1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}$ (b) $B = \left\{x \in \mathbb{N}: x = n^3 + n^2 \text{ y } n \in \{0,1,2,3,4\}\right\}$
(c) $C = \left\{\{x, y\} \subseteq \mathbb{N}: x + y = 7\right\}$ (d) $D = \{x \in \mathbb{N}: x = 12n, n \in \mathbb{N} \text{ y } x \leq 65\}$

2.- Determine por comprensión los siguientes conjuntos:
(a) $A = \{2,4,6,8,10, \dots\}$ (b) $B = \{1,3,9,27,81, \dots\}$
(c) $C = \left\{0, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{6}{7}, \frac{8}{9}, \dots\right\}$ (d) $D = \{\dots, -14, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21 \dots\}$

3.- Diga cuáles de los siguientes conjuntos son no vacíos:
(a) $A = \{x \in \mathbb{N}: 2x + 7 = 3\}$ (b) $B = \{x \in \mathbb{Z}: 3x + 5 = 9\}$

(c) $C = \{x \in \mathbb{R}: x^2 + 5 = 4\}$ (d) $D = \{x \in \mathbb{Q}: x^2 + 4 = 6\}$

4.- Sea $A = \{1, \{1\}, 2\}$. Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
(a) $1 \in A$ (b) $\{1\} \in A$ (c) $\{1\} \subseteq A$ (d) $\left\{\{1\}\right\} \subseteq A$
(e) $\{2\} \in A$ (f) $\{2\} \subseteq A$ (g) $\left\{\{2\}\right\} \subseteq A$ (h) $\emptyset \in A$

5.- Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:
(a) $\emptyset \in \emptyset$ (b) $\emptyset \subseteq \emptyset$ (c) $\{\emptyset\} \subseteq \emptyset$
(d) $\emptyset \in \{\emptyset\}$ (e) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ (f) $\emptyset = \{\emptyset\}$

6.- Sea $A = \left\{\frac{1}{4}, a, \{1, a\}, 3, \{1,2\}, \mathbb{N}\right\}$. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
(a) $\frac{1}{4} \in A$ (b) $\{1,2\} \subseteq A$ (c) $1 \in A$ (d) $\{1, a\} \in A$
(e) A tiene infinitos elementos. (f) $A \cap \mathbb{N} = \{3\}$ (g) $2 \in A$
(h) $\{a\} \in A$ (i) $\{a\} \subseteq A$ (j) $\{2\} \subseteq A$ (k) $\left\{\frac{1}{4}, 3\right\} \subseteq A$
(l) $\{1,2,a\} \subseteq A$ (m) $\left\{a, \{1,2\}\right\} \subseteq A$ (n) $\{\mathbb{N}\} \subset A$ (o) $\{\emptyset\} \subset A$

7.- Sean $A = \{x \in \mathbb{Z}: |x| \leq 3\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z}: x^2 < 7\}$. Hallar $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$ y $A \triangle B$

8.- Sean A={1,2,3,4,5}, B={1,2,4,8}, C={1,2,3,5,7} y D={2,4,6,8}. Hallar:
(a) $(A \cup B) \cap C$ (b) $A \cup (B \cap C)$ (c) $(A \cup B) - C$
(d) $A \cup (B - C)$ (e) $(B - C) - D$ (f) $B - (C - D)$

9.- Si $A = \left\{a, \{a\}, 0, \{0\}\right\}$, determinar todos los conjuntos X que satisfacen $\left\{\{a\}\right\} \subseteq X$, $X \subseteq A$ y $X \neq A$.

10.- Si A={1,2,3}, B={{1},{2},{3},{1,2,3}} y C={1,2,{1,2,3}}, determine $(C - B) \cap A$

Prof. María Teresa Varela

11.- Determinar $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} - \{\emptyset\}$ y $\{0, \emptyset, \{\emptyset\}\} - \emptyset$.

12.- Si $A = \{x \in \mathbb{Z}: x = 2n + 1, n \in \mathbb{Z}\}$ y $B = \{x \in \mathbb{Z}: x = 2m + 3, m \in \mathbb{Z}\}$, probar que $A = B$.

13.- ¿Existen conjuntos A y B tales que se cumpla $A \in B$ y $A \subseteq B$?

14.- Hallar el conjunto de partes de los siguientes conjuntos:
(a) $\emptyset$ (b) $\{\emptyset\}$ (c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (d) $\{1, \{2,3\}\}$ (e) $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

15.- Determinar los conjuntos A y B si se sabe que $A - B = \{1,3,7,11\}$, $B - A = \{2,6,8\}$ y $A \cap B = \{4,9\}$.

16.- Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
(a) $\mathcal{P}(A \cup B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ (b) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
(c) $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ (d) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cap B)$

17.- Demostrar los siguientes resultados para A, B y C conjuntos cualesquiera:
(a) Si $A \subseteq B$ y $A \subseteq C$, entonces $A \subseteq B \cap C$. (b) $A \cap B \subseteq A \cup B$.
(c) $A - B = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$ (d) $(A - B) - C = A - (B \cup C)$
(e) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$ (f) $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$
(g) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap C \subseteq B \cap C$ (h) Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup C \subseteq B \cup C$
(i) $A \subseteq B$ si y solo si $A \cup B = B$ (j) $A \subseteq B$ si y solo si $A \cap B = A$
(k) $A \cup B = \mathcal{U}$ si y solo si $A^c \subseteq B$ (l) $A \cap B = \emptyset$ si y solo si $A \subseteq B^c$
(m) $\emptyset - A = \emptyset$ (n) $A^c - B^c = B - A$
(ñ) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (o) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

18.- Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}$. Para cada $n \in \mathbb{Z}^+$ sea $A_n = [-2n, 3n]$. Determinar:
(a) A_3 (b) A_4 (c) $A_3 - A_4$ (d) $\bigcup_{n=1}^{7} A_n$ (e) $\bigcap_{n=1}^{7} A_n$

19.- Determinar si cada una de las siguientes familias de conjuntos es una partición del conjunto A dado:
(a) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $\mathcal{F} = \{\{4,5,6\}, \{1,8\}, \{2,3,7\}\}$
(b) $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ $\mathcal{F} = \{\{d, e\}, \{a, c, g\}, \{f, h\}, \{b, g\}\}$
(c) $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ $\mathcal{F} = \{\{1,3,7\}, \{2,6\}, \{5,8\}\}$

20.- Si $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{\{a\}, b, e\}$, $C = \{\{b\}, \{a\}, 1\}$ y $D = \{b, a, \{a\}\}$, hallar:
(a) $(A \times B) - (C \times D)$ (b) $(A - B) \times (D - C)$ (c) $[(B \cup C) \cap D] \times (A - D)$

21.- Si $A = \{1,2\}$, hallar $\mathcal{P}(A) \times A$

22.- Si $|A| = 4$ y $|B| = 3$, ¿cuántos subconjuntos tiene $A \times B$?

23.- ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$

Prof. María Teresa Varela

24.- Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas:
(a) Para todo conjunto A se tiene que $A \subset A \times A$.
(b) Existe algún conjunto A tal que $A \subset A \times A$.

25.- Demostrar los siguientes resultados para A,B,C y D conjuntos cualesquiera:
(a) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(b) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
(c) $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

26.- Demostrar usando el principio de inducción:
(a) $2a + 4a + 6a + \cdots + 2na = n(n+1)a$
(b) $2 + 5 + 8 + \cdots + (3n-1) = \frac{1}{2}n(3n+1)$
(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = 2 + (n-1)2^{n+1}$
(d) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}$
(e) $a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \frac{a(a^n-1)}{a-1}$ para $a \neq 1$
(f) $2n^2 > (n+1)^2$ para todo $n \geq 3$.
(g) $a^{n+1} - 1 = (a-1)(a^n + a^{n-1} + \cdots + a^2 + a + 1)$ para todo número real a.

27.- Probar:
(a) Si $ac|bc$ entonces $a|b$
(b) Si $a|b$ y $c|d$ entonces $ac|bd$
(c) $4 \nmid (n^2 + 2)$ para ningún entero n
(d) Si $n \geq 2$ y k es positivo, entonces $(n-1)|(n^k - 1)$
(e) Si p es un primo distinto de 2, entonces p es de la forma $4k + 1$ o $4m + 3$
(f) No existen enteros x, y tales que $x + y = 100$ y $m.c.d(x, y) = 3$
(g) Si $m.c.d(a, 4) = 2$ entonces a es un número par de la forma $4k + 2$
(h) Si $m.c.d(a, 4) = 2$ y $m.c.d(b, 4) = 2$ entoces $m.c.d(a + b, 4) = 4$

28.- Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:
(a) Si $a|(b + c)$ entonces $a|b$ o $a|c$
(b) Si $a|c$ y $a + b = c$ entonces $a|b$
(c) Si $a|c$ y $b|c$ entonces $ab|c$
(d) Si un entero es de la forma $6k + 5$ entonces es de la forma $3m - 1$
(e) Si un entero es de la forma $3m - 1$ entonces es de la forma $6k + 5$

29.- Hallar $m.c.d(315,66)$ y expresarlo en la forma $315x + 66y$

30.- Probar que todo conjunto $\{2n + 1, 2n + 3, 2n + 5\}$ de tres naturales impares consecutivos contiene un múltiplo de tres (sugerencia: usar inducción sobre n)